Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em Época Normal 03/06/2014

Parte I

1. Considere a equação $\cos(x^2) - 2x = 0$.

   (a) Mostre que a equação tem uma única solução $z \in \mathbb{R}$ e que essa solução se encontra no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

   (b) Utilizando o método de Newton, apresente uma sucessão garantidamente convergente para z e obtenha uma aproximação da solução com dois algarismos significativos.

2. Considere o sistema de equações dado por

$$x = 1 + \frac{h\, e^{-x^2}}{1+y^2}, \quad y = \frac{1}{2} + h \arctan(x^2 + y^2),$$

   em que $h > 0$ é um parâmetro real.

   (a) Mostre que, se h for suficientemente pequeno, existe uma e uma só solução do sistema no conjunto $D_h = [1, 1+h] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{h\pi}{2}]$.

   (b) Tomando $h = 1/10$, efectue duas iterações do método do ponto fixo e estime o erro cometido.

3. Considere o sistema linear $Ax = b$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Mostre que o método de Jacobi aplicado à resolução deste sistema permite obter uma sucessão convergente para a respectiva solução. Calcule três iterações do método de Jacobi e estime o erro cometido. (SUGESTÃO: A norma matricial associada à norma euclideana é definida, no caso de matrizes simétricas, como $\|M\|_2 = \max |\lambda_i|$ em que λ_i é valor próprio de M)

Parte II

1. Suponha que dispõe da seguinte tabela de valores de uma função $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, suficientemente regular, e tal que $\sup_{0 \le x \le 4} |f^{(n)}(x)| \le 1, \quad n \ge 2$.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0.00	1.84	2.91	3.14	3.24

   (a) Determine a melhor aproximação de f, no sentido dos mínimos quadrados, por funções da forma $g(x) = \alpha + \beta \sin x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Utilizando o polinómio interpolador de f em todos os pontos da tabela, determine um valor aproximado de $f(5/2)$, assim como um majorante do erro cometido.

2. Suponha que pretende determinar uma aproximação do integral

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^M f(x)\, dx + \int_M^{+\infty} f(x)\, dx,$$

   usando uma fórmula de quadratura que consiste em aplicar o método de Simpson composto, com n subintervalos, ao integral $\int_0^M f(x)\, dx$. Obtenha uma aproximação de I e o respectivo majorante do erro cometido quando $f(x) = e^{-x^2}, M = 5, n = 4$. Indique, também para a função $f(x) = e^{-x^2}$, como determinaria uma aproximação de I com oito algarismos significativos.

3. Considere o problema de valor inicial $y' = \sin(x + y^2), \quad y(0) = 0$. Determine um valor aproximado de $y(1/2)$ utilizando o método de Euler com $h = 0.1$ e estime o erro cometido.

4. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $|f^{(m)}(x)| \le M, \quad x > 0, m \in \mathbb{N}$. Seja ainda $p_n(x)$ o polinómio interpolador de f nos pontos $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{n}{2}$. Mostre que $\lim_{n \to \infty} p_n(x) = f(x)$, para cada $x \ge 0$.